22/04/20

LISTA 3:

1) → Quando o cjto de resultados possíveis é finito ou enumerável.

• Prob(X = a) = ? → variável discreta.

Prob(X = a) = f(a) // → função probabilidade

• a é uma constante.

Ex.:

A = {0, 1}

Resposta: Prob(X = a) = f(a) //

f(0) + f(1) =

Prob(X = 0) + Prob(X = 1) //

• Prob(X = a) = ?

• X é variável contínua. ⇝ Quando os valores são expressos como intervalo ou união de números reais

$$P(X=a) = \int_a^a f(x) \cdot dx = g(x)\Big|_a^a = g(a) - g(a) = \emptyset \,//$$

↳ Integral de a até a. //

⇝ $g(a) = \int f(x)$ //

Resposta: Prob(X = a) = ∅. //

2) → Ela é não decrescente!

• F(X) ⇝ Função de distribuição acumulada.

F(X) ⇒ É probabilidade!

F(X) = Prob(X <= x) ⇝ Tem que estar entre ∅ e 1!

Ex.:

F(5) = P(X <= 5)

F(10) = P(X <= 10)

$\boxed{F(5) \leq F(10)}$

22/04/20

Ex.: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 16\}$

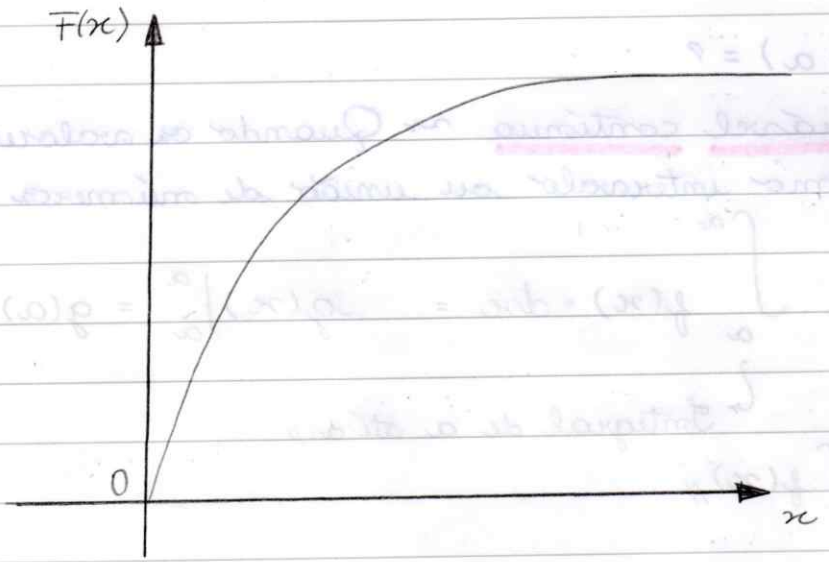
$P(X <= 5) = 0{,}5$ } $P(X <= 5) = P(X <= 10)$

$P(X <= 10) = 0{,}5$ } $F(5) = F(10)$

Slide 28 da Aula 3

• Se X é uma variável aleatória contínua, sua função de distribuição é contínua.

Ex.: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$



• Se X é uma variável aleatória discreta, F(x) é uma função contínua à direita, ou seja, a função de distribuição é do tipo "escada" e assim apresenta "pulos" (discontinuidades) cujo valor neste ponto é seu limite à direita.

Exemplo do slide 31 da aula 3

Ex.: $F(0) = P(X=0)$

$F(1) = P(X=0) + P(X=1)$

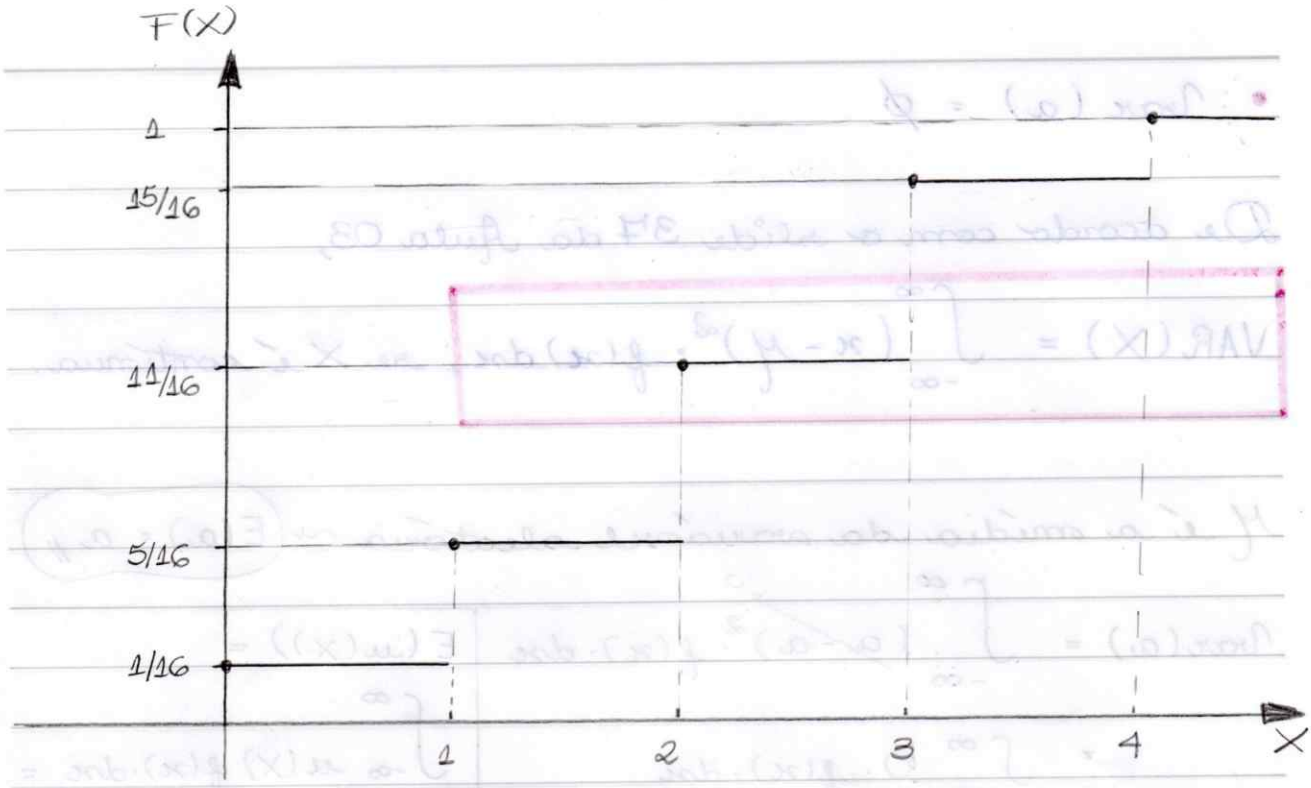
$F(2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$F(3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$F(4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$F(X) = 0$, se $X < 0$ e $F(X) = 1$, se $X > 4$.

22/04/20



3) a e b são constantes / X é uma v.a. contínua.

- $E(a) = a$

De acordo com o slide 34 da Aula 03,

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$ → se X é v.a. contínua.

Com $x = a$,

$$E(a) = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx$$ → É uma probabilidade!

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

22/04/20

- $var(a) = \emptyset$

De acordo com o slide 37 da Aula 03,

$$\boxed{VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$$ se X é contínua.

μ é a média da variável aleatória $\rightsquigarrow$ $E(a) = a$ //

$$var(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{(a-a)}^{0\,2} \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= 0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx$$

$$= 0 \cdot 1$$

$$= 0 \;//$$

$E(u(X)) =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(X)\, f(x) \cdot dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (aX+b) \cdot f(x) \cdot dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \underbrace{X f(x) \cdot dx}_{=E(X)} + \int_{-\infty}^{\infty} b \underbrace{f(x) \cdot dx}_{=1} =$$

$$a \cdot E(X) + b \;//$$

- $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$

$$E(aX+b) = a \cdot E(X) + E(b) = a \cdot E(X) + b \;//$$

- $var(aX+b) = a^2 \cdot var(X)$

$$var(aX+b) = E(a^2X^2 + 2ab + b^2) - (E(aX+b))^2 =$$
$$a^2 E(X^2) - 2ab + b^2 - (a \cdot E(X) + b)^2 = a^2 (E(X^2) - (E(X))^2)$$

22/04/20

De acordo com o slide 47,

$var(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$
\begin{aligned}
var(aX+b) &= E((aX+b)^2) - E^2(aX+b) \\
&= E(a^2X^2 + 2ab + b^2) - (a \cdot E(X) + b)^2 \\
&= E(a^2X^2 + 2ab + b^2) - (a^2 \cdot E^2(X) + 2ab + b^2) \\
&= a^2 \cdot E(X^2) + E(2ab) + E(b^2) - a^2 \cdot E^2(X) - 2ab - b^2 \\
&= a^2 \cdot E(X^2) + \cancel{2ab} + \cancel{b^2} - a^2 E^2(X) - \cancel{2ab} - \cancel{b^2} \\
&= a^2 \cdot E(X^2) - a^2 \cdot E^2(X) \\
&= a^2 \cdot \underbrace{(E(X^2) - E^2(X))}_{= var(X)} \\
&= a^2 \cdot var(X)
\end{aligned}
$$

4) $\left.\begin{array}{l} E(X) = 10 \\ var(X) = 16 \end{array}\right\} X$

$Y = -3X + 8 \rightsquigarrow Y$

$E(Y) = ?$

$var(Y) = ?$

$var(\underbrace{-3X+8}_{aX+b}) = (-3)^2 \cdot var(X) = 9 \cdot 16 = 144$

$a = -3$

$b = 8$

$E(\underbrace{-3X+8}_{aX+b}) = -3 \cdot E(X) + 8 = -3 \times 10 + 8 = -30 + 8$

$= -22$

$a = -3$

$b = 8$

22/04/20

5)

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{x^2}{9} \\ F(x) = 0{,}25 \end{cases}$$

$x^2 = 0{,}25 \cdot 9$

$x = \sqrt{0{,}25 \cdot 9}$

$x = 1{,}5$

$0 < x < 3$

$\int_0^{Q1} \frac{2x\,dx}{9} = 0{,}25$

$\frac{2}{9}\int_0^{Q1} x\,dx = 0{,}25$

$\frac{2}{9} \times \frac{x^2}{2}\Big|_0^{Q1} = 0{,}25$

$\frac{x^2}{2}\Big|_0^{Q1} = \frac{0{,}25}{2/9}$

$\frac{Q1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{0{,}25}{2/9}$

$\frac{Q1^2}{2} = \frac{0{,}25}{2/9} \times 2 = \frac{0{,}5}{2/9}$

$Q1^2 = 0{,}5 \times \frac{9}{2}$

$Q1^2 = \frac{4{,}5}{2}$

$Q1^2 = 2{,}25$

$Q1 = 1{,}5$

6)

$f(x) = \frac{2}{x^3} = \frac{K}{x^3}$

$\int \frac{2}{x^3} \cdot dx = \int 2x^{-3}\,dx = 2\int x^{-3}\,dx = x^{-2}$

$-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$F(x) = \frac{1}{x^2}$

tilibra

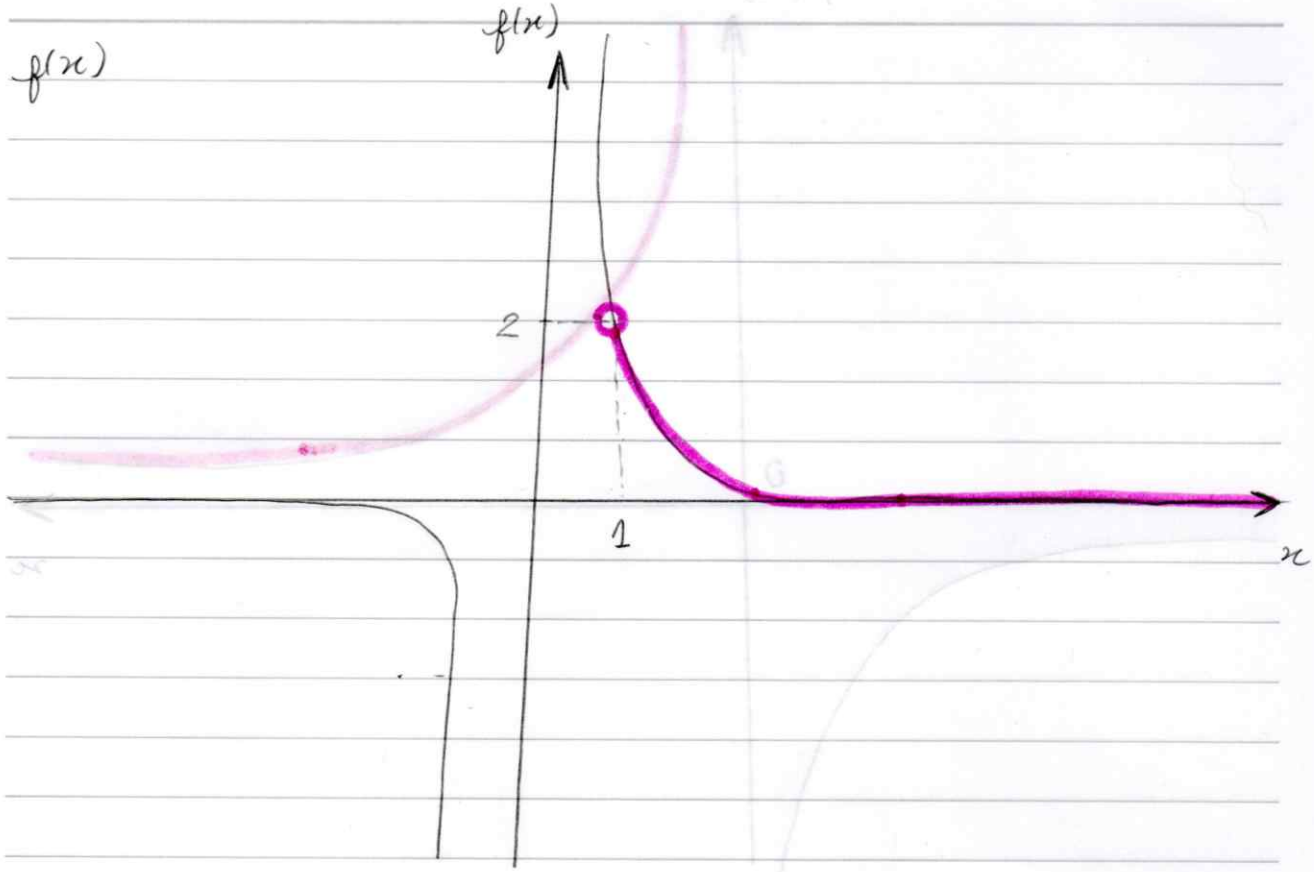
22/04/20

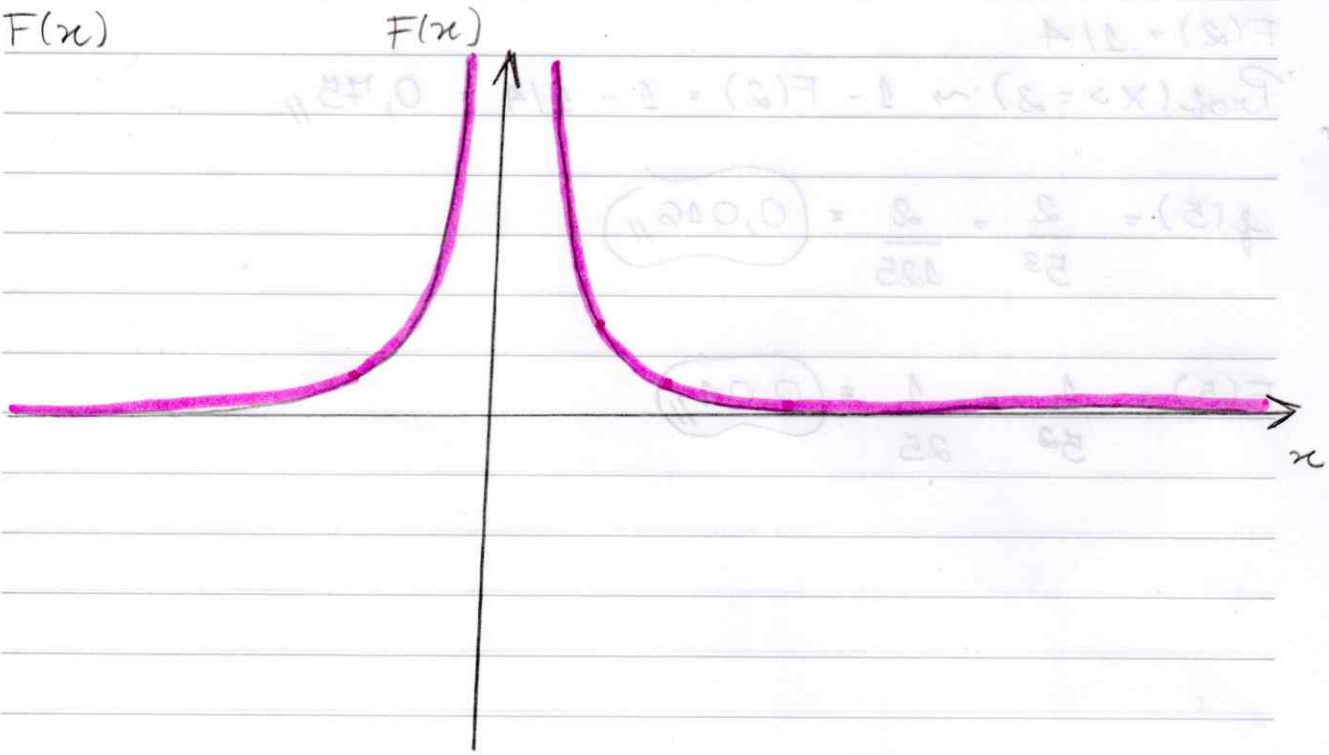
$F(2) = 1/4$

$Prob(X >= 2) \rightsquigarrow 1 - F(2) = 1 - 1/4 = 0,75$

$f(5) = \frac{2}{5^3} = \frac{2}{125} = 0,016$

$F(5) = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$


f(x)
f(x)
2
1
x


F(x)
F(x)
x